ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TÔ DUY HIỂN

ĐA THỨC CỰC TIỂU CỦA $\cos\frac{2\pi}{n}$

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TÔ DUY HIỂN

ĐA THỨC CỰC TIỂU CỦA $\cos\frac{2\pi}{n}$

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số : 8460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. ĐOÀN TRUNG CƯỜNG

THÁI NGUYÊN - 2018

Mục lục

Lời nói đầu **1**

1 Kiến thức chuẩn bị **3**

1.1 Đa thức Chebyshev 3

1.2 Đa thức chia đường tròn 10

1.3 Đa thức cực tiểu của $\cos\frac{2\pi}{n}$ 15

2 Đa thức cực tiểu của $\cos\frac{2\pi}{n}$ và đa thức Chebyshev **20**

2.1 Công thức hồi quy liên hệ giữa đa thức Chebyshev và đa thức cực tiểu của $\cos\frac{2\pi}{n}$ 20

2.2 Phân tích nhân tử của đa thức Chebyshev theo các đa thức $\Psi_n(x)$ 27

3 Hệ số tự do của đa thức cực tiểu của $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ **37**

3.1 Trường hợp n lẻ 38

3.2 Trường hợp n chẵn 41

Kết luận **50**

Tài liệu tham khảo **51**

Lời nói đầu

Với mỗi số nguyên dương n, $e^{2\pi i/n}$ là nghiệm của một đa thức chia đường tròn nên là một số đại số. Do đó $\cos\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2}(e^{2\pi i/n} + e^{-2\pi i/n})$ là một số đại số. Nói cách khác $\cos\frac{2\pi}{n}$ là nghiệm của một đa thức với hệ số hữu tỷ nào đó. Việc tìm đa thức cực tiểu $\Psi_n(x)$ của $\cos\frac{2\pi}{n}$ là một câu hỏi tự nhiên, đã và đang được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu. Nghiên cứu đầu tiên về đa thức cực tiểu $\Psi_n(x)$ được thực hiện bởi D. H. Lehmer vào năm 1933, ông đã đưa ra phương pháp để xây dựng các đa thức $\Psi_n(x)$ từ đa thức chia đường tròn. Năm 1993, W. Watkins và J. Zeitlin đưa ra một phương pháp khác để tìm đa thức cực tiểu $\Psi_n(x)$ nhờ sử dụng các đa thức Chebychev loại I. Sau đó D. Surowski và P. McCombs chứng minh lại các kết quả này bằng một phương pháp khác và đưa ra công thức cụ thể của các đa thức cực tiểu của $\cos\frac{2\pi}{p}$ với p là số nguyên tố vào năm 2003. Một năm sau, S. Beslin và V. De Angelis cũng đưa ra công thức hiện của đa thức cực tiểu của $\cos\frac{2\pi}{p}$ và $\sin\frac{2\pi}{p}$ khi p là một số nguyên tố. Mặt khác, dựa vào kết quả của W. Watkins và J. Zeitlin, năm 2012, B. Ozgur, A. Yurttas và I. N. Cangul trình bày phép tính $\Psi_n(x)$ bằng cách sử dụng ngôn ngữ lập trình Maple, giúp tìm nhanh các đa thức $\Psi_n(x)$ cho trường hợp n lớn. Các nghiên cứu gần đây về đa thức cực tiểu $\Psi_n(x)$, như của các tác giả I. N. Cangul, Yusuf Z. Gurtas,... tập trung vào việc tìm công thức tính trực tiếp các hệ số của đa thức $\Psi_n(x)$.

Mục đích của luận văn là tìm hiểu mối liên hệ giữa đa thức cực tiểu $\Psi_n(x)$ của $\cos\frac{2\pi}{n}$ với các đa thức Chebysev. Thông qua các mối liên hệ này, chúng tôi trình bày phương pháp tìm đa thức cực tiểu $\Psi_n(x)$ và tính hệ số tự do của các đa thức cực tiểu này. Các kết quả này được trình bày dựa trên các bài báo của C. Adiga, I. N. Cangul, H. N. Ramaswamy [5], Yusuf Z. Gurtas [6] và W. Watkins,

J. Zeitlin [7].

Luận văn được chia thành ba chương. Chương 1 là các kiến thức chuẩn bị, bao gồm định nghĩa, một số tính chất cơ bản của đa thức Chebyshev và đa thức chia đường tròn. Trong chương này cũng nhắc lại khái niệm mở rộng trường, số đại số, từ đó trình bày định nghĩa về đa thức cực tiểu $\Psi_n(x)$ của $\cos\frac{2\pi}{n}$. Chương 2 tập trung xét các mối liên hệ giữa đa thức cực tiểu $\Psi_n(x)$ với các đa thức Chebyshev loại I, $T_n(x)$ và loại II, $U_n(x)$. Kết quả chính của chương này là đưa ra công thức hồi quy liên hệ giữa đa thức Chebyshev và đa thức cực tiểu $\Psi_n(x)$, từ đó áp dụng tính toán các đa thức cực tiểu này. Một kết luận quan trọng cũng được đưa ra trong chương này đó là, các đa thức $T_n(x)-1$, $T_n(x)+1$ và $U_n(x)$ có thể tồn tại dưới dạng tích của các đa thức cực tiểu $\Psi_d(x)$, với d là ước của n. Nội dung chính của chương 3 là dựa vào mối liên hệ giữa đa thức cực tiểu $\Psi_n(x)$ và đa thức Chebyshev loại I để tính toán hệ số tự do của đa thức cực tiểu $\Psi_n(x)$.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc với TS Đoàn Trung Cường. Thầy là người đã dành rất nhiều thời gian để chỉ bảo, động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu. Nhờ có sự tận tình, chu đáo và tâm huyết của thầy mà tác giả đã hoàn thành luận văn "Đa thức cực tiểu của $\cos\frac{2\pi}{n}$".

Tác giả xin chân thành cảm ơn các Thầy cô giáo thuộc Khoa Toán - Tin, Phòng Đào tạo trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã giúp đỡ tạo điều kiện cho tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Cuối cùng tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè, lãnh đạo đơn vị công tác và các đồng nghiệp đã luôn động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi trong quá trình học tập và làm luận văn.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 06 năm 2018

Tác giả luận văn

Tô Duy Hiển

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng ta sẽ tìm hiểu một số kiến thức cơ sở để chuẩn bị cho việc trình bày về đa thức cực tiểu $\Psi_n(x)$ của $\cos\frac{2\pi}{n}$ trong các chương sau. Nội dung chính của chương bao gồm định nghĩa, một số tính chất cơ bản của đa thức Chebyshev và đa thức chia đường tròn. Một phần của chương này được dành để nhắc lại khái niệm về mở rộng trường, số đại số, từ đó trình bày định nghĩa về đa thức cực tiểu $\Psi_n(x)$ của $\cos\frac{2\pi}{n}$. Các kết quả chính của chương được tham khảo từ các tài liệu [1, 2, 3, 4].

1.1 Đa thức Chebyshev

Đa thức Chebyshev được đặt theo tên nhà toán học nổi tiếng người Nga Pafnuty Chebyshev (1821 - 1894). Đa thức Chebshev đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết gần đúng và có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực Toán học khác. Trong các nghiên cứu về đa thức cực tiểu của $\cos\frac{2\pi}{n}$, năm 1993, W. Watkins và J. Zeitlin đưa ra một phương pháp để tính toán các đa thức cực tiểu $\Psi_n(x)$ của $\cos\frac{2\pi}{n}$ nhờ sử dụng đa thức Chebychev. Nội dung chính của tiết này trình bày định nghĩa, một số tính chất cơ bản và các quan hệ giữa đa thức Chebyshev loại I và loại II. Các kết quả chính của tiết được tham khảo từ tài liệu [4].

Định nghĩa 1.1.1. Các đa thức $T_n(x)$ với $n \in \mathbb{N}$ được xác định bằng quy nạp

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{aligned}$$

được gọi là các đa thức Chebyshev loại I.

Ví dụ 1.1.2. Một số đa thức Chebyshev loại I đầu tiên

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1. \\ T_1(x) &= x. \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1. \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x. \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1. \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x. \\ T_6(x) &= 32x^6 - 32x^4 + 2x^2 + 1. \end{aligned}$$

Định nghĩa 1.1.3. Các đa thức $U_n(x)$ với $n \in \mathbb{N}$ được xác định bằng quy nạp

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1, \\ U_1(x) &= 2x, \\ U_{n+1}(x) &= 2xU_n(x) - U_{n-1}(x) \end{aligned}$$

được gọi là các đa thức Chebyshev loại II.

Ví dụ 1.1.4. Một số đa thức Chebyshev loại II đầu tiên là

$$\begin{aligned}
&U_0(x) = 1.\\
&U_1(x) = 2x.\\
&U_2(x) = 4x^2 - 1.\\
&U_3(x) = 8x^3 - 4x.\\
&U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1.\\
&U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x.\\
&U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1.
\end{aligned}$$

Tiếp theo ta sẽ tìm hiểu một số tính chất cơ bản của các đa thức Chebyshev. Kết quả sau đây là một tính chất đặc trưng của các đa thức Chebyshev loại I.

Mệnh đề 1.1.5. Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ và mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có

$$T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha).$$

Chứng minh. Ta chứng minh mệnh đề bằng phép quy nạp theo n. Dễ thấy mệnh đề đúng với $n = 0$ và $n = 1$. Giả sử mệnh đề đúng đến $n = k$, khi đó ta có

$$\begin{aligned}
T_{k+1}(\cos\alpha) &= 2\cos\alpha.T_k(\cos\alpha) - T_{k-1}(\cos\alpha)\\
&= 2\cos(\alpha)\cos(k\alpha) - \cos((k-1)\alpha)\\
&= \cos((k+1)\alpha).
\end{aligned}$$

□

Đa thức Chebyshev loại II liên quan đến công thức $\sin(n\alpha)$.

Mệnh đề 1.1.6. Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ta có

$$U_n(\cos\alpha) = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}.$$

Chứng minh. Dễ kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 0$ và $n = 1$, giả sử mệnh đề

đúng đến $n = k$, khi đó ta có

$$\begin{aligned} U_{k+1}(\cos\alpha) &= 2\cos\alpha U_k(\cos\alpha) - U_{k-1}(\cos\alpha) \\ &= \frac{2\cos\alpha\sin(k+1)\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin k\alpha}{\sin\alpha} \\ &= \frac{\sin(k+2)\alpha}{\sin\alpha}. \end{aligned}$$

□

Tìm hiểu về bậc và hệ số của các đa thức Chebyshev, ta thu được kết quả sau đây.

Mệnh đề 1.1.7. Với $n \geq 1$, các đa thức $T_n(x)$, $U_n(x)$ đều có bậc n, hệ số nguyên và hệ số cao nhất lần lượt là 2^{n-1} và 2^n.

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp của đa thức $T_n(x)$, trường hợp của $U_n(x)$ được chứng minh hoàn toàn tương tự. Ta có

$$\begin{aligned} T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1. \end{aligned}$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$ và $n = 2$. Giả sử mệnh đề đúng đến $n = k$, khi đó $T_k(x)$, $T_{k-1}(x)$ đều có hệ số nguyên, có bậc lần lượt là k, $k-1$ và có hệ số cao nhất lần lượt là 2^k, 2^{k-1}. Từ $T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$ suy ra $T_{k+1}(x)$ cũng phải có hệ số nguyên, có bậc là $k+1$ và hệ số cao nhất là $2.2^k = 2^{k+1}$. Ta được điều phải chứng minh. □

Quan sát các đa thức Chebyshev đầu tiên, ta thấy $T_1(x) = x$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$, chúng là các hàm số lẻ, và $T_0(x) = 1$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$, chúng là các hàm số chẵn. Liệu điều này có thể tổng quát hóa được hay không? Bằng phép quy nạp, ta thu được tính chất rất thú vị sau đây của các đa thức Chebyshev.

Mệnh đề 1.1.8. Các hàm số $T_n(x)$, $U_n(x)$ chẵn nếu n chẵn và lẻ nếu n lẻ.

Chứng minh. Ta chứng minh mệnh đề cho trường hợp của hàm số $T_n(x)$, trường hợp của $U_n(x)$ được chứng minh hoàn toàn tương tự.
Dễ dàng kiểm tra mệnh đề đúng với $n=0$ và $n=1$. Giả sử mệnh đề đúng đến $n=2k+1$, khi đó ta có

$$\begin{aligned} T_{2k+2}(-x) &= 2(-x).T_{2k+1}(-x) - T_{2k}(-x) \\ &= 2x.T_{2k+1}(x) - T_{2k}(x) \\ &= T_{2k+2}(x), \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} T_{2k+3}(-x) &= 2(-x).T_{2k+2}(-x) - T_{2k+1}(-x) \\ &= -2x.T_{2k+2}(x) + T_{2k+1}(x) \\ &= -T_{2k+3}(x). \end{aligned}$$

Vậy $T_{2k+2}(x)$ là hàm chẵn và $T_{2k+3}(x)$ là hàm lẻ. Ta được điều phải chứng minh. □

Kết quả tiếp theo nói về nghiệm của các đa thức Chebyshev loại I và loại II.

Mệnh đề 1.1.9. Với $n \geq 1$,

(i) $T_n(x)$ có đúng n nghiệm phân biệt là $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$, với $k=0,1,...,n-1$;

(ii) $U_n(x)$ có đúng n nghiệm phân biệt là $\cos\frac{k\pi}{n+1}$, với $k=1,2,...,n$.

Chứng minh. (i) Giả sử $x \in [-1;1]$ là một nghiệm của $T_n(x)$. Đặt $x=\cos\alpha$, với $\alpha \in [0;\pi]$. Ta có $0=T_n(x)=T_n(\cos\alpha)=\cos n\alpha$. Từ đó suy ra $\alpha=\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$, $k=0,1,...,n-1$. Với $k \in \{0,1,...,n-1\}$, ta được n giá trị khác nhau $\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$.
Vậy $T_n(x)$ có n nghiệm phân biệt là $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$, với $k=0,1,...,n-1$. Vì $T_n(x)$ có bậc là n nên đây là tất cả các nghiệm của $T_n(x)$.
(ii) Tương tự, giả sử $x \in (-1;1)$ là một nghiệm của $U_n(x)$. Đặt $x=\cos\alpha$, với $\alpha \in (0;\pi)$. Ta có $0=U_n(x)=U_n(\cos\alpha)=\dfrac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$. Từ đó suy ra